

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 15–16.
Conjuntos de números. Hoja 1

1 Probar la “Propiedad de Buen Orden” de \mathbb{N} : todo conjunto no vacío tiene un primer elemento.

2 i) Demostrar que la ecuación $x^2 = 2$ no la satisface ningún número racional.

ii) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no es racional.

3 Demostrar que si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces $r + x$ y rx son irracionales.

4 Demuestra que en \mathbb{R} si $x < y$ y $a > 0$ entonces $ax < ay$, que si $0 < a < b$ y $x > 0$ entonces $ax < by$ y que si $0 < x$ entonces $x^2 < y^2$ y $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. En particular concluye que si $0 < x < y$ entonces $x^n < y^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5 Si $a > 0$ demostrar que

i) Si $a > 1$ entonces $1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $0 < a < 1$ entonces $1 > a > a^2 > a^3 > \dots > a^n$, $n \in \mathbb{N}$.

¿Qué pasa si $a < 0$?

6 Demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Usando esto, deducir y demostrar una fórmula para la suma de los N primeros números pares y otra para la de los N primeros números impares.

7 Demostrar que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=0}^M z^n = \frac{1 - z^{M+1}}{1 - z}, \quad y \quad \sum_{n=N}^M z^n = \frac{z^N - z^{M+1}}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad M > N.$$

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \quad \text{Binomio de Newton} \quad \left(\text{con } \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\right).$$

8 Demuestra que

i) $n^3 + 5n$ es divisible por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) $2^n < n!$, si $n \geq 5$.

iii) Desigualdad de Bernoulli: para todo $x > -1$ se tiene

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

9 ¿Para qué números naturales se verifica $n^2 < 2^n$?

10 Demuestra que

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2n = \prod_{j=1}^n 2j = 2^n n! \quad y \quad 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1) = \prod_{j=1}^n (2j+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

11 Demuestra que para todos $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$$

12 i) Supongamos que una sucesión de números verifica

$$a_{n+1} = ka_n, \quad a_0 \text{ dado}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Encuentra y demuestra por inducción una expresión general para a_n .

ii) Idem si

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n}, \quad a_1 \text{ dado}, \quad n = 1, 2, \dots$$
$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \quad n = 1, 2, \dots$$

13 Si

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con $0 < a_0, a_1 < 2$, probar que $0 < a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14 Supongamos que

$$0 \leq y_{n+1} \leq ky_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Demostrar que

$$0 \leq y_n \leq k^{n-1}y_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

15 Si a_1, \dots, a_n son positivos probar que

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n\right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

16 Demostrar por inducción en el número de elementos, que todo conjunto finito de \mathbb{R} se puede ordenar de manera creciente.

17 Encuentra todos los números reales que verifican

$$\text{i) } x^2 = 2x, \quad \text{ii) } x^2 > 3x+4, \quad \text{iii) } 1 < x^2 < 4, \quad \text{iv) } \frac{1}{x} < x, \quad \text{v) } \frac{1}{x} < x^2, \quad \text{vi) } |x-1| - |x-2| = 0,$$
$$\text{vii) } |x| + |x-1| = 1, \quad \text{viii) } |4x-5| < 13, \quad \text{ix) } |x^2-1| = 3, \quad \text{x) } |x-1| > |x+1|, \quad \text{xi) } |x| + |x+1| < 2.$$

18 Demostrar que

$$|z+w| \leq |z| + |w|, \quad |zw| = |z||w|, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

19 Demostrar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

y que por tanto el inverso de z es $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Dibuja el inverso.

Probar que en forma polar, si $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$ y $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

20 Probar que la exponencial compleja verifica

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

21 Calcular las raíces complejas de la unidad: $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n = 1$ con $n = 2, 3, 4, \dots$ y dibujarlas.

22 Sean X e Y son dos conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (o función).

i) Si $A, B \subset X$ demostrar que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ y que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ pero en general no se da la igualdad en el último caso.

Si f es inyectiva, probar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

ii) Generaliza lo anterior para una familia arbitraria de conjuntos $A_i \subset X$, $i \in I$ (conjunto de índices), probando que

$$f(\cup_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} f(A_i), \quad f(\cap_{i \in I} A_i) \subset \cap_{i \in I} f(A_i)$$

y que si f es inyectiva se da la igualdad en la última expresión.

23 Sean X e Y son dos conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación (o función). Si $C \subset Y$ definimos la preimagen de C por f como

$$f^{-1}(C) = \{x \in X, f(x) \in C\} \subset X.$$

Probar que para una familia arbitraria de conjuntos $C_i \subset Y$, $i \in I$ (conjunto de índices), se tiene

$$f^{-1}(\cup_{i \in I} C_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}(\cap_{i \in I} C_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(C_i)$$

24 Sea $A = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x-1}$ para $x \in A$.

Demostar que f es inyectiva, determinar el rango de f : $R(f) = Im(f) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in A, f(x) = y\}$ y calcular la función inversa de f .

25 Encontrar una aplicación biyectiva entre $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 < x < 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}, 5 < x < 10\}$